

## ВАРИАНТ КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧА ДЛЯ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Поданий варіант критерія міцності Філоненко-Бородича для матеріалів, що чинять різний опір розтягу та стиску. Запропоновані нові інтерполяційні формули, апроксимуючі значення граничної поверхні, виходячи із співвідношень, котрі пов'язують інтенсивність напруження та гідростатичний тиск для двох кутів виду девіатора напружень.*

*A variant of the Filonenko-Borodich fracture criterion for materials with different tensile and compressive strength is presented. New interpolation formulae are proposed. They approximate the values of limiting surface depending on the relations that associate stress intensity and hydrostatic pressure for two angles of the stress deviator type.*

**Введение.** Для оценки прочности структурно-неоднородных материалов (к ним относятся чугуны, бетоны, скальные породы, грунты, отдельные металлокерамические композиции, некоторые термореактивные пластмассы) предложено значительное количество критериев предельного состояния. Достаточно полный обзор исследований в этой области за прошедшее столетие представлен в [1]. Наибольшее распространение в инженерной практике получили критерии Кулона-Мора, Друкера-Прагера, Писаренко-Лебедева и др. [2-4]. Однако их применение приводит к значительным погрешностям, если прочностные параметры среды при растяжении и сжатии отличаются на порядок и выше. Кроме того, они не учитывают в полной мере влияние первого инварианта тензора напряжения на процессы разрушения. Более широкие возможности имеет критерий Филоненко-Бородича [5-6], развитый в работах [7-11]. Такой подход позволяет, исходя из пяти базовых опытов, прогнозировать процессы разрушения при различных видах сложного нагружения. Вместе с тем, использование предлагаемых интерполяционных формул [7-11], которые связывают интенсивность напряжений произвольной точки пространства с гидростатическим давлением для двух предельных углов вида напряженного состояния, и "сглаживают" угловые точки на предельной поверхности приводят, в ряде случаев, к возникновению участков с другим знаком кривизны. А это значит, что поверхность разрушения не всюду выпуклая.

В данной работе анализируются условия выпуклости поверхности разрушения и предлагаются простые интерполяционные соотношения для вычисления предельных значений интенсивности напряжений, обеспечивающие ее гладкость. Эффективность такого подхода проиллюстрирована при описании разрушения бетона для различных лучевых траекторий пространства напряжений [12].

Отметим, что подобный подход, совершенствующий критерий Писаренко-Лебедева [2] в третьем квадранте пространства напряжений, для более узкого класса материалов, представлен в [13].

**1. Вариант модели Филоненко-Бородича.** Для изложения основных положений критерия Филоненко-Бородича воспользуемся цилиндрической системой координат  $z, \rho, \varphi$ , связанной с декартовой  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , следующими соотношениями [2, 3]

$$z = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sqrt{3} = \sqrt{3} \sigma_0, \quad \rho = \sqrt{2} \sigma_u / \sqrt{3} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{3},$$

$$\varphi = \arccos \left[ \frac{3 + \mu}{2\sqrt{3 + \mu^2}} \right], \quad \mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_u$  - интенсивность напряжений,  $\sigma_0$  - гидростатическое давление,  $\mu$  - параметр Надаи-Лоде,  $\varphi$  - угол вида девіатора напруження,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения, такие, что  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Отметим, что ось  $z$  совпадает с диагональю пространства главных напряжений. Тогда критерий прочности материала, можно записать в виде

$$F(\sigma_u, \sigma_0, \mu) = 0. \quad (2)$$

Конкретизация соотношения (2) осуществляется при помощи метода Филоненко-Бородича. Данная поверхность строится на базе опытных данных при частных видах напряженных состояний [5]. Записываются

сначала уравнения, определяющие прочность в двух меридиональных сечениях, соответствующих предельным значениям параметра Надаи-Лоде и углам  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/3$ . Обозначим

$$\sigma_u^{(0)} = \sigma_u^{(0)}(\sigma_0) \text{ и } \sigma_u^{(1)} = \sigma_u^{(1)}(\sigma_0). \quad (3)$$

где  $\sigma_u^{(0)}$  - функция, определяющая прочность в сечении  $\varphi = 0$ , и, соответственно,  $\sigma_u^{(1)}$  - в другом сечении при  $\varphi = \pi/3$ . В первом случае параметры кривой определяют, исходя из результатов опытов на одноосное сжатие, двухосное равномерное растяжение и трехосное растяжение, так как эти виды нагружения соответствуют нулевому углу вида девиатора напряжения. А во втором случае - привлекают данные опытов на одноосное и трехосное равномерное растяжение, а также двухосное равномерное сжатие.

**2. Конкретизация параметров модели.** Полученные соотношения предельной интенсивности напряжений  $\sigma_u$ , как функции от гидростатического давления  $\sigma_0$ , можно аппроксимировать степенными зависимостями

$$\sigma_u^{(0)} = A_1 \cdot \sigma_b^+ \cdot \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b^+} - f \right)^\alpha, \quad \sigma_u^{(1)} = B_1 \cdot \sigma_b^+ \cdot \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_b^+} - f \right)^\beta, \quad (4)$$

где  $\sigma_b^+$  - предел прочности материала при одноосном растяжении,  $A_1, \alpha, B_1, \beta, f$  - параметры аппроксимирующих функций. Эффективность такой аппроксимации покажем на примере определения соответствующих предельных кривых для бетона [13]. Тогда предельные кривые в меридиональных сечениях, описываются функциями (4), представленными на рис. 1.

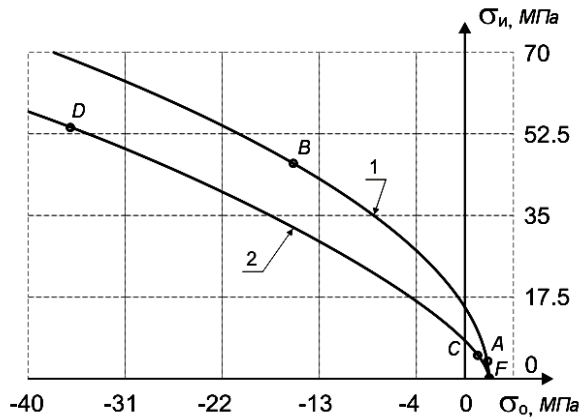


Рис. 1. Зависимости предельных интенсивностей напряжений  $\sigma_u^{(0)} = \sigma_u^{(0)}(\sigma_0)$  (кривая 1) и  $\sigma_u^{(1)} = \sigma_u^{(1)}(\sigma_0)$  (кривая 2) для двух углов вида девиатора напряжения

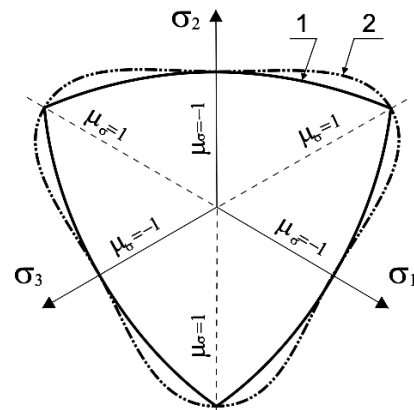


Рис. 2. Вид предельной поверхности разрушения в сечении  $\sigma_0 = -10$  МПа при использовании различных интерполяционных формул (кривая 1 - предлагаемый вариант, 2 - модель С.Ф. Клованича)

Как следует из рис. 1., точки  $A, B, C, D, F$ , определяющие параметры предельных кривых, имеют следующие координаты

$$A = \left( \frac{2}{3} \sigma_{2b}^+, \sigma_{2b}^+ \right), B = \left( \frac{1}{3} \sigma_b^-, \sigma_b^- \right), C = \left( \frac{1}{3} \sigma_b^+, \sigma_b^+ \right), D = \left( \frac{2}{3} \sigma_{2b}^-, \sigma_{2b}^- \right), F = \left( \sigma_{3b}^+, 0 \right) \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_b^-$  - предел прочности материала при одноосном сжатии,  $\sigma_{2b}^+, \sigma_{2b}^-$  - пределы прочности при двухосном равномерном растяжении и сжатии,  $\sigma_{3b}^+$  - предел прочности при трехстороннем равномерном растяжении.

Ввиду статистической природы механических характеристик материалов, при определении прочностных параметров всегда имеют место погрешности вычислений и эксперимента. Неучет этих факторов приводит к тому, что построенная таким образом предельная поверхность разрушения может быть не всюду выпуклая. Вопрос об ограничениях, накладываемых на соотношения (4), рассмотрим несколько позже.

После определения параметров функций (4) осуществляется интерполяция поверхности разрушения для значений параметров Надаи-Лоде, которые находятся между предельными величинами  $\mu = -1$  и  $\mu = 1$ . Для такой интерполяции предложены различные соотношения, при которых соблюдается неразрывность и гладкость девиаторного сечения [8-11]. При выборе интерполяционных формул, как правило, требуют для "сглаживания" угловых точек выполнения равенства нулю производной  $\rho'(\varphi)$  при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/3$ . Однако такое предположение,

в ряде случаев, приводит к искажению формы поверхности разрушения, так как на ней появляются участки вогнутости, что противоречит основным требованиям к таким поверхностям.

Продемонстрируем вышеизложенное, воспользовавшись интерполяционной формулой С.Ф. Клованича [8]

$$\rho(\varphi) = 1 - 4c(1-c)\cos\varphi(1-\cos\varphi), \quad (6)$$

где  $c = \sigma_u^{(1)}(\sigma_0)/\sigma_u^{(0)}(\sigma_0)$ . Вид такой предельной поверхности в девиаторном сечении при  $c = 0,667$  показан на рис. 2 штрих-пунктирной линией 2.

**3. Предлагаемые интерполяционные формулы.** Как видно из рис. 2., равенство нулю функции  $\rho'(\varphi)$  при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/3$  при малых значениях параметра  $c$  всегда приводит к возникновению участков вогнутости на поверхности разрушения. Для устранения данного недостатка предлагается использовать интерполяционную формулу, описывающую зависимость  $\rho(\varphi)$  частью окружности определенного радиуса, как показано на рис. 3.

В этом случае параметр  $R$  является радиусом окружности, описанной вокруг треугольника  $M_1M_2M_3$ , стороны которого легко определить для заданного значения  $\sigma_0$ . Тогда

$$R = \frac{c(c-1)+1}{2c-1}. \quad (7)$$

Величину  $\rho(\varphi)$  вычисляем, используя теорему косинусов, из треугольника  $O_1O_2P$

$$\rho(\varphi) = \delta \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\delta^2 \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + R^2 - \delta^2}, \quad \delta = R - c. \quad (8)$$

При таком подходе в девиаторном сечении предельной поверхности всегда будет выпуклый криволинейный треугольник.

После нахождения функций  $\sigma_u^{(0)}(\sigma_0)$ ,  $\sigma_u^{(1)}(\sigma_0)$  и  $\rho(\varphi)$ , критерий прочности для материалов с различной реакцией при растяжении и сжатии (2) можно представить в виде

$$\sigma_u - \sigma_u^{(0)}(\sigma_0) \cdot \rho(\varphi) = 0, \quad (9)$$

где  $\varphi$  - угол вида напряженного состояния, определяемый соотношениями (1), исходя из параметров Надаи-Лоде.

Необходимо отметить, что и при таком подходе могут нарушаться условия выпуклости, если для некоторых значений гидростатического давления  $\sigma_0$  величина  $c = \sigma_u^{(1)}(\sigma_0)/\sigma_u^{(0)}(\sigma_0) < 0,5$ . Такая ситуация возможна, из-за неточности определения механических характеристик материала в базовых опытах. Поэтому при вычислении параметров степенных функций вида (4) всегда необходимо дополнительное исследование на выпуклость предельной поверхности и уточнение результатов испытаний, таким образом, чтобы выполнялось соотношение  $c \geq 0,5$  для всех допустимых значений гидростатической составляющей  $\sigma_0$ . При  $c = 0,5$  величина  $R = \infty$  и в девиаторном сечении поверхности будет обычный треугольник.

**4. Анализ достоверности предлагаемой модели.** Проанализируем эффективность данного варианта критерия разрушения при расчете предельных напряжений для лучевых траекторий напряжений, воспользовавшись опубликованными результатами испытаний [12]. Ограничимся рассмотрением расчетных формул для вычисления разрушающих напряжений для случая плоского напряженного состояния, когда обе компоненты отрицательные. Пусть  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 \geq \sigma_3$ . Для лучевой траектории в третьем квадранте пространства напряжений будем считать, что  $\sigma_2 = k \cdot \sigma_3$ , где  $k$  - тангенс наклона луча к оси  $\sigma_3$ . Параметр Надаи-Лоде при этом определяется соотношением  $\mu = 1 - 2k$ . Кроме того

$$\varphi = \arccos\left[\frac{2-k}{\sqrt{3+(1-2k)^2}}\right], \quad \sigma_u = \sigma_3\sqrt{1-k+k^2}, \quad \sigma_0 = \frac{1+k}{3} \cdot \sigma_3. \quad (10)$$

Если подставить последние выражения в (9), то получим трансцендентное уравнение относительно величины  $\sigma_3 = \sigma_3^{(b)}$ , разрешая которое можно вычислить, предельное значение напряжения, соответствующее разрушению для данной лучевой траектории. Для решения вышеупомянутого уравнения можно использовать любой численный метод [14], учитывая, что искомый корень является корнем нечетной кратности при известном диапазоне его изменения. Другая компонента тензора напряжения определяется соотношением  $\sigma_2^{(b)} = k \cdot \sigma_3^{(b)}$ .

Методика расчета предельных напряжений при иных соотношениях между  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  строится аналогичным образом. Результаты расчетов предельных напряжений в рамках предлагаемой модели (кривая 1) представлены на рис. 4. Там же приведены аналогичные результаты при использовании критерия Писаренко-Лебедева (кривая 2).

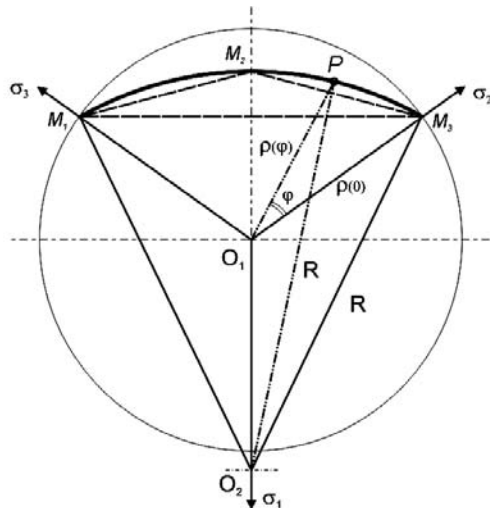


Рис. 3. Часть девиаторного сечения предельной поверхности, формируемого окружностью

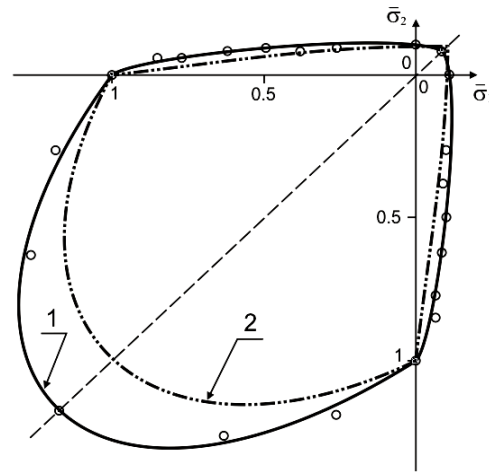


Рис. 4. Предельные диаграммы прочности бетона. Точками отмечены результаты опытов [12]

Вычисленные значения напряжений отнесены к пределу прочности при одноосном сжатии. Расчеты выполнялись при таких значениях параметров  $\sigma_b^+ = 4,9$  МПа;  $\sigma_b^- = -46,0$  МПа;  $\sigma_{2b}^+ = 3,8$  МПа;  $\sigma_{2b}^- = -54,0$  МПа;  $\sigma_{3b}^+ = 2,7$  МПа. Необходимо отметить, что ввиду отсутствия величины последнего параметра в [12], она определялась численно, исходя из наилучшего соответствия расчетных и экспериментальных данных. При этом данная величина хорошо коррелировала с аналогичным параметром для бетона работы [8].

Как следует из рис. 4, рассматриваемый вариант критерия Филоненко-Бородича позволяет достаточно эффективно прогнозировать разрушение материала во всех четырех квадрантах пространства напряжений. Полученные результаты лучше коррелируют с данными опытов, чем другие вышеупомянутые критерии. Кроме того, данный подход не накладывает никаких ограничений на величины предельных напряжений, в отличие, например, от метода Друкера-Прагера [4].

**Заключение.** Из анализа известных критериев разрушения [1] следует, что наиболее широкие возможности при построении предельных поверхностей структурно-неоднородных материалов имеет подход Филоненко-Бородича. Он позволяет, исходя из пяти базовых опытов, конкретизировать параметры критерия разрушения и легко использовать его для прогнозирования несущей способности материалов с существенно различным сопротивлением при растяжении и сжатии. Однако перед его применением необходимы дополнительные исследования на выпуклость предельной поверхности разрушения и анализ используемых интерполяционных формул, с целью корректировки используемых параметров критерия. При известных трудностях определения прочностных свойств материала для трехстороннего равномерного растяжения упомянутая величина может быть вычислена, исходя из наилучшего соответствия расчетных и экспериментальных данных для других траекторий простого нагружения.

#### Список литературы.

1. Mao-hong Yu. Advance in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century // Appl. Mech. Rev. – 2002. – 55, No 3. – P. 169-218.
2. Писаренко Г.С. Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 416 с.
3. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под ред. академика НАН Украины А.А.Лебедева. – Киев: Издательский дом “Ин Юре”, 2003. – 540 с.
4. Drucker D.C. and Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design // Quart. Appl. Math. – 1952. – 10, No 2. – P. 157-165.
5. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. сборник. – 1954. – Вып. 19. – С. 36-48.
6. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. – Москва: Изд. МГУ, 1961. – 90 с.
7. Балан Т.А. Вариант критерия прочности структурно-неоднородных материалов при сложном напряженном состоянии // Пробл. прочности. – 1986. – №2. – С. 21-26.
8. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. – Запорожье: 2009. – 400с.
9. Яшин А.В. Критерий прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженных состояний // Расчет и конструирование железобетонных конструкций. – М: Стройиздат, 1977. – С. 48-57.
10. Argiris J.H., Faust G., Szimmat J., Warnke P., Willam K. Recent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels // Nucl. Eng. Dec. – 1974. – 28, No 1. – P. 42-75.
11. Ahmad S.H., Shah S.P. Complete Triaxial Stress-Strain Corver for Concrete // J. Struct. Div. ASCE. – 1982. – 108, No 4. – P. 728-742.
12. Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses // ACI Journal – 1969. – 66, No 8. P. 656-666.
13. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic-damage model for concrete // Int. J. Solid and Structures. – 1989. – 25, No 3. – P. 299-326.
14. Бахвалов Н.С. Численные методы. – Москва: Наука, 1975. – Т.1. – 632 с.